ISIMA 2 F2 et F5 mardi 7 décembre 2004
Modélisation
Examen 1ère session 2004-05 Durée : 2 heures
Documents de cours et calculatrice autorisés

Problème 1 (7)

On considère la chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

1- Tracer le graphe des transitions de la chaîne de Markov suivant les valeurs de α.
2- Représenter les classes d'états. 3 états
3- Existe-t-il une distribution stationnaire ?
4- Est-elle unique ?
5- Déterminer la (les) distribution(s) stationnaire(s) ?
6- La chaîne de Markov est-elle convergente pour $0 < \alpha < 1$?
7- La chaîne de Markov est-elle convergente pour $\alpha = 0$?
8- On considère $\alpha = 1$ et on pose $p(0) = (0, 0, 1)$ distribution initiale des probabilités d'état.
La distribution $p(n)$ a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini ?
La chaîne de Markov est-elle convergente pour $\alpha = 1$?

Problème 2 (3)

Une pièce d'équipement électrique peut se trouver dans l'un des trois états :
(1) bon état ; (2) état marginal ; (3) défaillante.
A la fin de chaque jour de service, l'état de la pièce est enregistré, la matrice de transition ainsi obtenue est

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

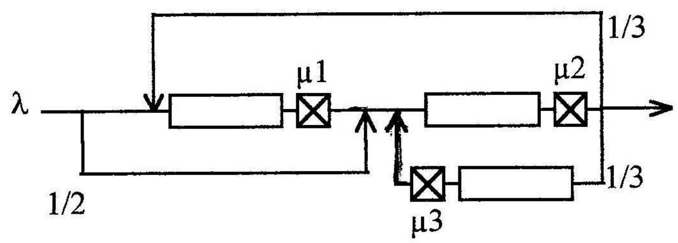
1- Quelle est la durée de vie moyenne d'une pièce se trouvant initialement en bon état ?
2- La pièce étant initialement en bon état, quelle est la probabilité d'atteindre l'état marginal avant la défaillance de la pièce ?

TSVP --->

Problème 3 (6)

Le réseau suivant est composé de files d'attente à un seul serveur. Les arrivées sont poissonniennes de taux λ et les services sont exponentiels de taux

$\mu_1=10$, $\mu_2=8$ et $\mu_3=5$.



1- Déterminer le taux d'arrivée à chaque station.

2- Quel est le taux λ maximum admissible ?

3- Déterminer en fonction de λ : le nombre moyen de clients dans chaque station et dans le système ainsi que les temps moyens de séjour.

Problème 4 (4)

Dans un réseau fermé à 3 stations et 4 clients, chaque station a un seul serveur et le service suit une loi exponentielle de taux constant μ_j, j étant le numéro de station.

1- Quel est le nombre de vecteurs d'état $k=(k_1, k_2, k_3)$ où k_j est le nombre de clients dans la station j ?

On suppose que la ligne l de la matrice d'entiers Ek contient le $l^{\text{ième}}$ état k et que la ligne l du vecteur Pk contient la probabilité de cet état k.

2- Proposer un **algorithme de principe** pour calculer la probabilité $p(c, j)$ qu'il y ait c clients dans la station j.

3- En déduire le nombre moyen de clients dans la station j.