ISIMA 2 F2 et F5 Modélisation	mercredi 10 décembre 2008
Examen 1ère session 2008-2009	
Durée : 2 heures	Documents de cours et calculatrice autorisés
Sujet sur 2 pages	

Problème 1 (3)

On utilise des disques durs dont la durée de vie suit une loi exponentielle d'espérance T. De plus on suppose que leur fonctionnement est indépendant.

1- Caractériser simplement la distribution de probabilité de la durée de vie d'un dispositif utilisant un disque dur qui est remplacé au plus k fois lorsqu'il tombe en panne. Distinguer les cas $k = 0$ et $k > 0$.
2- Quelle est la probabilité que deux pannes se produisent dans un intervalle de durée T ?
3- Déterminer la distribution de probabilité (fonction de répartition et densité) de la durée de vie d'un dispositif non redondant comportant 3 disques durs.

Problème 2 (6)

Une chaîne de Markov est définie par la matrice de transition P.

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

1- Tracer le graphe des transitions de la chaîne de Markov.
2- Déterminer les classes d'états.
3- Existe-t-il une distribution stationnaire ? Est-elle unique ?
4- Déterminer une distribution stationnaire ?
5- Montrer que la chaîne de Markov est convergente.
6- Quelle est la limite du vecteur des probabilités d'état quand le nombre de transitions n tend vers l'infini ? En déduire la limite de P^n quand n tend vers l'infini.
7- Déterminer le nombre moyen de transitions nécessaires pour atteindre le dernier état la première fois en partant du premier état.
8- En considérant les deux derniers états comme absorbants, quelle est la probabilité d'être absorbé par le dernier plutôt que par l'avant dernier ?

Suite au verso... **TSVP --->**

Problème 3 (5)

Le téléphone d'un secrétariat a la possibilité de mettre un seul appel en attente. Le téléphone sonne, la secrétaire décroche traite l'appel, un nouvel appel est automatiquement mis en attente, l'appel en cours se termine et l'appel en attente est traité. Lorsqu'un appel est en attente les appels arrivant sont rejetés. Les appels arrivent suivant une loi de Poisson de taux λ. La durée d'une conversation est supposée suivre une loi exponentielle de taux μ.

1- Caractériser le processus stochastique de traitement des appels.

2- Tracer le graphe des transitions du processus.

3- Caractériser la station file d'attente à l'aide de la notation de Kendall.
Sans calcul et à l'aide des documents de cours exprimer les probabilités d'état à l'équilibre ?
Doit-on utiliser une condition de stabilité ?

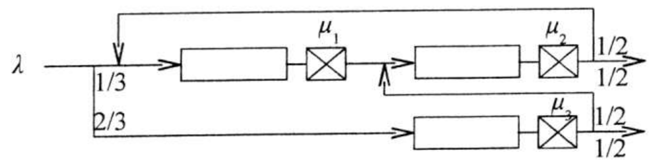
4- Quelle est la probabilité de rejet d'un appel ?

5- Quel est le taux d'occupation (au téléphone) de la secrétaire ?

6- Quel est le nombre moyen d'appels en attente ?

Problème 4 (6)

Le réseau ouvert suivant est composé de files d'attente à un seul serveur. Les arrivées sont poissonniennes de taux $\lambda = 3$ et les services sont exponentiels de taux $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$ et $\mu_3 = 2$.



1- Déterminer le taux d'arrivée à chaque station. Le réseau est-il stable ?

2- Déterminer le nombre moyen de clients dans le système ainsi que le temps moyen de séjour en fonction de λ.

3- Quelle est la valeur maximale admissible de λ ?

On ferme le réseau précédent en bouclant la sortie sur l'entrée et on place 4 clients dans le réseau.

4- Quel est le nombre de vecteurs d'état $k = (k_1, k_2, k_3)$ où k_j est le nombre de clients dans la station j ?

5- Quel est le nombre moyen de passages par chaque station ?