Modélisation des processus aléatoires
ISIMA $2^{\text{ème}}$ année - F3-F4
Examen du 8 décembre 2005

Le sujet comporte 2 pages. Durée : 2 heures.
4 pages A4 de notes manuscrites et calculatrice autorisées.

N.B. : A chaque fois que cela sera possible, on donnera la réponse sous forme littérale puis numérique.

1 Les moissons

Un agriculteur souhaite organiser ses moissons au mieux. La condition essentielle pour lui est de disposer de 3 jours consécutifs sans pluie. On suppose que la probabilité qu'il pleuve demain s'il pleut aujourd'hui est de 0,6. La probabilité qu'il ne pleuve pas demain s'il ne pleut pas aujourd'hui est de 0,9.

1. Décrire cette évolution météo par une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition M et le graphe.
2. La chaine est-elle récurrente, irréductible et apériodique ?
3. Déterminer la loi invariante π associée.
4. Quel est le temps moyen de récurrence de l'état "il ne pleut pas" ?
5. Quelle est la probabilité pour qu'il ne pleuve pas pendant 3 jours consécutifs ? L'agriculteur peut-il être serein ?

2 Le cambrioleur et le vigile

On s'intéresse à la surveillance du siège social d'une société. Le bâtiment est de forme hexagonale (polygonale à 6 côtés). Il est équipé de 6 entrée, une sur chaque face du bâtiment. Un vigile se déplace d'une porte à l'autre de sorte que, s'il quitte une entrée, il y a une probabilité $p > 0$ qu'il décide d'aller à l'entrée adjacente dans le sens des aiguilles d'une montre, et $(1-p)$ à l'autre entrée adjacente.

1. Définir la chaîne de Markov associée (états accessibles, définition d'une transition). Représenter son graphe.
2. Ecrire la matrice de transition.
3. Pour éviter d'être attendu par une personne malintentionnée, le vigile change chaque jour le point de départ de sa tournée. En supposant que le vigile se trouve initialement avec la probabilité $f_k = k/21$ au sommet n°$1 \leq k \leq 6$, calculer les probabilités $p_k^{(1)}$ que la sentinelle se trouve immédiatement après au sommet $k = 1, 2, \ldots, 6$.
4. Justifier que la chaîne est irréductible, récurrente et apériodique.
5. Déterminer la loi invariante π associée.
Indication : penser à observer les symétries du système ; aucun calcul n'est nécessaire.

6. Un cambrioleur cherche à s'introduire dans le bâtiment. Il a préalablement bien étudié la stratégie de surveillance (aléatoire donc imprévisible...) du vigile. Ayant observer que le vigile vient de quitter une entrée (par exemple le sommet n^o 1), il décide de tenter immédiatement son opération en essayant de s'introduire par cette entrée. Combien d'entrées le vigile va-t-il contrôler en moyenne avant de revenir à cette entrée n^o 1 ?
7. Sachant que $p = 1/3$, que le vigile met $1min30sec$ pour passer d'une entrée à l'autre et stationne $15sec$ à chaque entrée, de combien de temps dispose le cambrioleur en moyenne pour forcer l'entrée ?
   Indication : on suppose le régime stationnaire établi ; on raisonnera sur une chaîne à temps discret.

3 Gestion d'une file d'impression

Les durées d'exécution des impressions sur l'imprimante commune du service communication d'une entreprise de taille moyenne sont exponentiellement distribuées autour d'une durée moyenne de 16 secondes selon la taille des documents à imprimer. Les impressions arrivent aléatoirement au rythme moyen d'une toutes les 48 secondes et sont traitées en mode "First In First Out". Pour évaluer la qualité du service fourni, le responsable du service informatique se pose les questions suivantes :

1. Quel est le temps moyen passé par une impression dans le système ? (durée entre requête et fin de l'impression)
2. Quelle est la probabilité qu'une impression nécessite plus de 2 minutes de traitement (attente + impression) ?
3. De temps en temps, une file d'attente des impressions se forme. Quel est alors le nombre moyen de taches en attente ?
4. Si la charge de l'imprimante augmente au point que le temps moyen qui s'écoule entre une demande d'impression et la sortie du document excède 1 minutes, l'achat d'une deuxième imprimante sera envisagé.
   (a) Quel est le taux d'arrivées (nombre d'impressions par minutes) à partir duquel cette situation se produit ?
   (b) Exprimer l'excès d'arrivées correspondant en pourcentage.
   (c) Quel est le nombre moyen de taches dans le système dans ce cas ?
5. Supposons maintenant que le critère pour décider l'achat d'une deuxième imprimante soit que jamais plus de 10% des taches n'excède 1 minute dans le système.
   (a) Quel est le taux d'arrivées pour lequel cette situation se produit ?
   (b) Quel est le nombre moyen de taches dans le systeme dans cette situation ?
   (c) Quel est le nombre moyen de taches en attente de traitement dans cette situation ?
   (d) Quel est le temps moyen passé par une tache dans le système ?
   (e) Comparer avec la situation "normale" de référence.

FIN