ISIMA 2 - F2 et F5 Modélisation	mardi 4 décembre 2012
Examen 1ère session 2012-2013	
Durée : 2 heures, **sujet sur 2 pages**	Documents de cours et calculatrice autorisés

Problème 1 (5)

Le service maintenance possède k forets pour la foreuse de l'atelier. Chaque foret a une durée de vie qui suit une loi exponentielle d'espérance $T = 2{,}0$ jours. Lorsqu'un foret casse il est immédiatement remplacé par le suivant, sauf s'il s'agit du dernier. On suppose que leurs durées de fonctionnement sont indépendantes.

1- Caractériser simplement la densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire D durée de travail de la foreuse avec k forets. Distinguer les cas $k = 1$ et $k > 1$.
2- Sans calcul, quelle est l'espérance mathématique et la variance de la durée de travail D ?
3- Pour k grand (50 ou 100) par quelle loi peut-on approcher la durée de travail ?
4- Pour $k = 3$, donner l'expression mathématique permettant de calculer la probabilité de pouvoir travailler pendant au moins j jours ?

On considère que le travail s'effectue en parallèle sur k foreuses n'ayant qu'un foret chacune. Le système est en panne lorsque tous les forets sont cassés.
5- Caractériser la loi de probabilité de la variable aléatoire durée de travail du système.
6- Quelle est la loi de la durée de fonctionnement avec tous les forets en bon état ?

Problème 2 (5)

1- La matrice de transition P définit-elle une chaîne de Markov ?

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

2- Tracer le graphe des transitions de la chaîne de Markov.
3- Déterminer les classes d'états.
4- Existe-t-il une distribution stationnaire ? Est-elle unique ?
5- Déterminer une distribution stationnaire ?
6- Montrer que la chaîne de Markov est convergente.
7- Quelle est la limite du vecteur des probabilités d'état quand le nombre de transitions n tend vers l'infini ? En déduire la limite de P^n quand n tend vers l'infini.
8- Déterminer le nombre moyen de transitions nécessaires pour atteindre le dernier état la première fois en partant du premier état.
9- En considérant les deux derniers états comme absorbants, quelle est la probabilité d'être absorbé par le dernier plutôt que par l'avant dernier ?

TSVP --- >>>

Problème 3 (5)

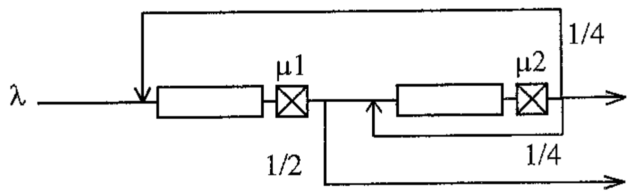
Une station service peut accueillir **1** voiture en service, à la pompe, et **2** en attente (total : 3 places). Lorsque la station est pleine, les voitures se dirigent vers une autre station, il y a rejet. Les voitures arrivent suivant une loi de Poisson de taux λ. La durée du service est supposée suivre une loi exponentielle de taux $\boldsymbol{\mu}$.

1- Caractériser le processus stochastique d'arrivée et de service des voitures à la station.
2- Tracer le graphe (simplifié) des transitions du processus.
3- Caractériser la station service en termes de file d'attente à l'aide de la notation de Kendall.
   Sans calcul et à l'aide du cours exprimer les probabilités d'état à l'équilibre ?
   Doit-on utiliser une condition de stabilité ?

Donner les résultats suivants à l'aide des probabilités d'état à l'équilibre.
4- Quelle est la probabilité de rejet d'une voiture ?
5- Quel est le taux d'occupation de la pompe ?
6- Quel est le nombre moyen de voitures en attente ?

Problème 4 (5)

Le réseau suivant est composé de files d'attente à un seul serveur. Les arrivées sont poissonniennes de taux $\lambda = 3$ et les services sont exponentiels de taux $\mu 1 = 10$ et $\mu 2 = 8$.



1- Déterminer le taux d'arrivée à chaque station. Le réseau est-il stable ?
2- Déterminer le nombre moyen de clients dans le système ainsi que le temps moyen de séjour en fonction de λ.
3- Quelle est la valeur maximale admissible de λ ?
4- Quel est le nombre moyen de clients dans le réseau ?
5- Quel est le temps moyen de séjour dans le réseau ?

Considérons le réseau fermé en rebouclant la sortie sur l'entrée du réseau précédent.
6- Quel est le nombre d'états lorsqu'il y a 5 clients ?
7- Quels sont les nombres moyens de passages par les stations ?