D.S. Optimisation
ISIMA F4 2eme année

Mercredi 7 décembre 2005
Durée : 2 heures - Documents de cours autorisés

Exercice 1

On rappelle que le cône tangent en $\bar{x} \in C$, où C est un sous-ensemble de $I\!R^n$ défini par des inégalités, soit $C = \{x \in I\!R^n | g_j(x) \leq 0, j \in J\}$ où les fonctions g_j sont supposées différentiables, est le cône fermé des directions réalisables; il est défini par $T_C(\bar{x}) = \{d \in I\!R^n | \langle \nabla g_j(\bar{x}), d \rangle \leq 0, \forall j \in J(\bar{x})\}$, où $J(\bar{x})$ est l'ensemble des indices des contraintes actives en $\bar{x}$.

Soit C l'ensemble de $I\!R^2$ défini par

$$C = \{x \in I\!R^2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

et $f : I\!R^2 \mapsto I\!R$ définie par :

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}.$$

1. La fonction f est-elle convexe ? concave ?
2. On considère le problème de la minimisation de f sur C.
   (i) Montrer que tout minimum se trouve sur la frontière de C.
   (ii) Expliciter $T_C(x)$ en tout point de C. intérieur, sommet, face
   (iii) En déduire l'unique minimum de f sur C.
3. Résoudre à présent le problème de la maximisation de f sur C.

Exercice 2 Soit (P) le problème consistant à minimiser $f(x)$ sous la contrainte

$$x \in C := \{x \in I\!R^n | g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, p\}$$

On fait les hypothèses suivantes sur les données de (P) :

- Les fonctions $f, g_1, \ldots, g_p$ sont convexes, différentiables sur $I\!R^n$;
- C est borné;
- Il existe $x_0 \in \mathrm{Int}(C)$ tel que $g_j(x_0) < 0, \forall j = 1, \ldots, p$.

1. Enoncer les propriétés du problème d'optimisation (P) que ces hypothèses induisent.

2. On notera h la fonction duale associée à (P), soit

$$h : u \in (I\!R^p)^+ \mapsto h(u) := \inf_x \{f(x) + \sum_{j=1}^{p} u_j g_j(x)\}$$

et, pour tout $\alpha > 0$, soit :

$$\phi_\alpha : x \in \mathrm{Int}(C) \mapsto \phi_\alpha(x) := f(x) - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{p} \ln(-g_j(x))$$

(a) Vérifier que ϕ_α est convexe et différentiable sur $\mathrm{Int}(C)$.

(b) Montrer qu'il existe des points de $\mathrm{Int}(C)$ minimisant ϕ_α sur $\mathrm{Int}(C)$.

(c) Soit x_α un minimum de ϕ_α sur $\mathrm{Int}(C)$ et on désigne par u_α le vecteur de $(I\!R^p)^+$ dont la composante j est $\frac{-1}{\alpha g_j(x_\alpha)}$; montrer que x_α minimise le lagrangien pour $u = u_\alpha$ et calculer la valeur de $h(u_\alpha)$.

(d) Etablir l'encadrement suivant :

$$f(x_\alpha) - \frac{p}{\alpha} \leq f^* \leq f(x_\alpha)$$

où f^* est la valeur optimale de (P).

(e) Commenter la pertinence de l'approche choisie pour résoudre (P).