Examen : Traitement Numérique du Signal
ZZ2 F1-F5 - Septembre 2011

Les documents et calculatrices sont autorisés

Exercice 1 Transformée en z (3 pts)

1. Soit le signal $x[n] = \alpha^n \epsilon[n]$, où $\epsilon[n]$ est le signal échelon (0 pour $n < 0$ et 1 pour $n \geq 0$).

   a) Rappelez la transformée en z, notée $X(z)$, de ce signal. **(0.5pt)**

   b) Quel est le domaine de convergence de cette transformée. **(0.5pt)**

2. Considérons maintenant le signal $y[n] = a^n \cos(bn)\epsilon[n]$.

   a) Tracer ce signal pour $n \in \{-2, 6\}$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \frac{\pi}{4}$. **(0.5pt)**

   b) Calculez la transformée en z de ce signal et montrez qu'elle peut s'écrire $Y(z) = \frac{1-a\cos(b)z^{-1}}{1-2a\cos(b)z^{-1}+a^2z^{-2}}$. **(1.5pts)**

Exercice 2 Systèmes numériques (7 pts)

1. Soit le système régi par l'équation de récurrence :

$$y[n] = x[n-2] + y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$$

   a) Donnez l'expression de la fonction de transfert en z, notée $H(z)$, de ce système. **(0.5pt)**

   b) Quelle est la réponse en fréquence de ce système. **(0,5pt)**

   c) De façon générale, quelle est la condition pour qu'un système numérique soit stable et causal. **(0,5pt)**

   d) Est-ce que ce système est stable et causal ? **(0.5pt)**

2. Soit le système régi par l'équation de récurrence :

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = x[n], \text{ pour } n \geq 0$$

   a) Calculer la réponse impulsionnelle de ce système numérique par la méthode des résidus pour $n \geq 0$. (*Attention au cas* $n = 0$) **(3pts)**

   b) Calculer la réponse indicielle de ce système numérique par la méthode de la décomposition en élements simples. **(2pts)**

Exercice 3 Transformée de Fourier et Fenêtrage (5 pts)

Afin d'obtenir une représentation fréquentielle d'un signal, nous sommes obligé de limiter sa durée. En pratique, cette limitation est réalisée par la troncature du signal. Cependant, il est possible de "fenêtrer" le signal par une fonction d'apodisation afin d'avoir la meilleure lisibilité de sa transformée de Fourier.

Dans la figure 1, on observe plusieurs transformées de Fourier à temps discret d'un signal périodique simple (exponentielle complexe), issues de l'utilisation de 3 fenêtres. On exploite 128 échantillons de ce signal dont la période d'échantillonnage T_e vaut 0.01s.

1. Donner une expression analytique du signal étudié, que l'on notera $x[n]$. (On notera T_e la période d'échantillonnage, $h[n]$ le signal d'apodisation et f_0 la fréquence d'oscillation de l'exponentielle complexe).(**1pt**)
2. Donner la valeur numérique de f_0. (**1pt**)
3. Dans le cas des trois figures suivantes, donner les fenêtres utilisées en justifiant vos propos. On pourra exploiter la figure 2(**3pts**)

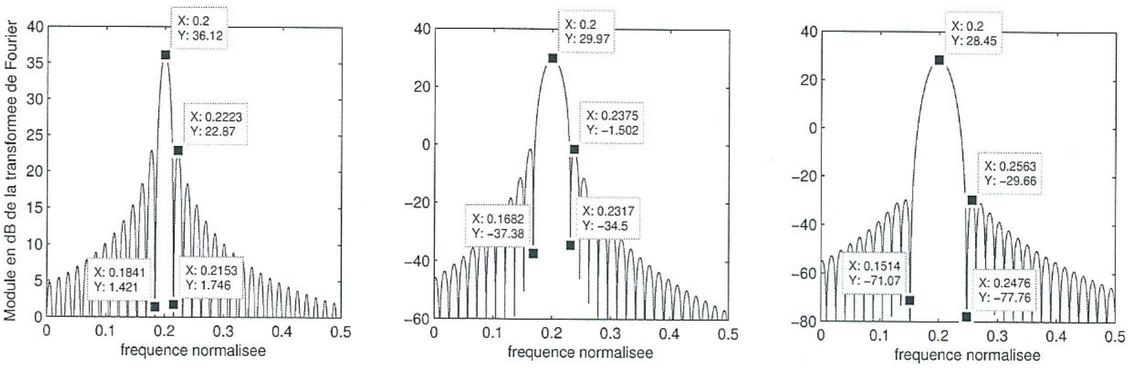

FIGURE 1 – Transformée de Fourier à temps discret à l'aide de 3 fenêtres

Fenêtres	Rectangulaire	Barlett	Hanning	Hamming	Blackman
Atténuation en dB entre lobe principal et secondaire	13	24	31	43	57
Demi-largeur du lobe principal normalisée	$\frac{2}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{6}{N}$

FIGURE 2 – Paramètres des fenêtres d'apodisation

Exercice 4 Synthèse de filtre (5 pts)

1. Par la technique de la transformation bilinéaire, on souhaite synthétiser un filtre numérique passe-haut RII, qui présente une fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{4}$ et une atténuation dans la bande coupée d'au moins 20dB pour les fréquences inférieures à $\frac{f_e}{8}$
   a) Tracer le gabarit du filtre analogique équivalent. (**0.5pt**)
   b) Trouver la fonction de transfert analogique (en p) qui respecte ces conditions. On cherchera une solution parmi les filtres de Butterworth. (**1.5pts**)
   c) Calculer la fonction de transfert en z du filtre par transformation bilinéaire. (**1pt**)
2. Expliquez les différences dans les réponses en fréquence des filtres synthétisés par les méthodes RII se basant sur des filtres de Butterworth, Tchebychev I, Tchebychev II et elliptique. (**2pts**)