Examen Méthodes de Décomposition ISIMA 3F4

Jonas Koko

18 mars 2003

Exercice 1. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de bord Γ. On considère le problème

$$\begin{aligned} \rho u - \Delta u &= f, \quad \text{dans } \Omega, && (1)\\ u &= 0, \quad \text{sur } \Gamma, && (2) \end{aligned}$$

où $\rho > 0$. On partitionne Ω en 2 sous–domaines Ω_1 et Ω_2, avec $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ l'interface. Donner (sous forme variationnelle) une méthode de décomposition de domaine de type décomposition/coordination pour le problème (1)-(2).

Exercice 2. On se propose de résoudre le système

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

par une méthode de décomposition. On suppose que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$. Ce qui induit une décomposition de la matrice et du second membre

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Le système (3) devient alors

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \tag{4}$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2. \tag{5}$$

A noter que le système (4)-(5) n'est pas découplé.

Considérons maintenant le système découplé

$$A_{11}x_1 = b_1 - y1, \tag{6}$$
$$A_{21}x_1 = b_2 - y2. \tag{7}$$

1.– Dans quel cas les systèmes (4)-(5) et (6)-(7) ont la même solution ?

2.– Formuler le problème d'optimisation avec contraintes qui permet de résoudre (3) par une méthode de décomposition.

3.– Généraliser la formulation au cas $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

4.– Quel est le nombre idéal de sous–problèmes pour une machine disposant de P processeurs ?